Resolución de sistemas por el Método de Matriz Inversa

Ejercicio nº 1.-

Expresa y resuelve el siguiente sistema en forma matricial:

$$\left.\begin{array}{r} 4x+2y-z=6 \\ x \qquad +z=1 \\ 2x+y+z=3 \end{array}\right\}$$

Ejercicio nº 2.-

Expresa en forma matricial y resuelve utilizando la matriz inversa:

$$\left.\begin{array}{r} -x+2y-z=1 \\ 3x-y+2z=-4 \\ x-y+z=-1 \end{array}\right\}$$

Ejercicio nº 3.-

Expresa el siguiente sistema en forma matricial y resuélvelo utilizando la matriz inversa:

$$\left.\begin{array}{r} -3x+y-z=-5 \\ x+2y+z=0 \\ 2x \qquad +z=3 \end{array}\right\}$$

Ejercicio nº 4.-

Expresa y resuelve en forma matricial el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x-y+z=6 \\ 2x-y+z=8 \\ x-2y+z=7 \end{array}\right\}$$

Ejercicio nº 5.-

Expresa en forma matricial y resuelve, utilizando la matriz inversa:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+3y+z=7 \\ x+y-2z=5 \\ y+2z=0 \end{array}\right\}$$

Teorema de Rouché y Regla de Cramer

Ejercicio nº 6.-

Estudia la compatibilidad del siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x-y+2z-t=3 \\ 2x+y-z+t=2 \\ -x+y+z-t=1 \end{array}\right\}$$

Ejercicio nº 7.-

Estudia la compatibilidad de este sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x-2y=3 \\ -x+3y=-1 \\ -x+6y=2 \\ x-y=5 \end{array}\right\}$$

Ejercicio nº 8.-

Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 2x-y+3z=1 \\ -x+y-z=2 \\ x+y+3z=3 \end{array}\right\}$$

Ejercicio nº 9.-

Estudia la compatibilidad del sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x+y-z=3 \\ -x+2y-z=1 \\ 2x-y+z=2 \end{array}\right\}$$

Ejercicio nº 10.-

Utiliza el teorema de Rouché para estudiar la compatibilidad del siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 3x-4y+z=1 \\ -x+2y-z=3 \\ x\qquad -z=7 \end{array}\right\}$$

Ejercicio nº 11.-

Resuelve estos sistemas, aplicando la regla de Cramer:

a) $$\left.\begin{array}{r} -x+4y=-6 \\ 2x-3y=7 \end{array}\right\}$$

b) $$\left.\begin{array}{r} x-2y+z=-3 \\ 2x+3y-z=3 \\ x-y+3z=6 \end{array}\right\}$$

Ejercicio nº 12.-

Resuelve los siguientes sistemas, aplicando la regla de Cramer:

a) $$\left.\begin{array}{r} 2x - y = 0 \\ 3x + y = 5 \end{array}\right\}$$

b) $$\left.\begin{array}{r} x + y - z = 2 \\ -x + 2y + z = 4 \\ 3x + y + z = 6 \end{array}\right\}$$

Ejercicio nº 13.-

Resuelve, aplicando la regla de Cramer, los siguientes sistemas:

a) $$\left.\begin{array}{r} -x + 3y = -5 \\ x + y = 1 \end{array}\right\}$$

b) $$\left.\begin{array}{r} -x + 2y - z = 0 \\ x - 3y + z = -3 \\ 2x + y - z = 1 \end{array}\right\}$$

Ejercicio nº 14.-

Resuelve, aplicando la regla de Cramer:

a) $$\left.\begin{array}{r} -3x + 2y = 3 \\ 2x - y = -1 \end{array}\right\}$$

b) $$\left.\begin{array}{r} 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y + z = 1 \\ x - 3y - 2z = -3 \end{array}\right\}$$

Ejercicio nº 15.-

Aplica la regla de Cramer para resolver estos sistemas:

a) $$\left.\begin{array}{r} 3x + 2y = -5 \\ 5x + y = 1 \end{array}\right\}$$

b) $$\left.\begin{array}{r} x + 2y - z = 1 \\ -3x + y + z = -5 \\ x - y + 3z = 5 \end{array}\right\}$$

Ejercicio nº 16.-

Estudia, y resuelve si es posible, el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 2y + z - t = 8 \\ x + y - z + t = 1 \\ -x + 2y + z + 2t = 2 \end{array}\right\}$$

Ejercicio nº 17.-

Estudia la compatibilidad del siguiente sistema, y resuélvelo si es posible:

$$\left.\begin{array}{r} -x + y - 2z = -5 \\ x + 3y + z = -4 \\ 7x + 5y + 11z = 8 \end{array}\right\}$$

Ejercicio nº 18.-

Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones y resuélvelo si es posible:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + 2z = 6 \\ 3x - y + z = 5 \\ -x + 2y - z = 1 \end{array}\right\}$$

Ejercicio nº 19.-

Estudia, y resuelve si es posible, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} -3x + 4y - z = -3 \\ x + 2y + z = 5 \\ x + y + 3z = 6 \end{array}\right\}$$

Ejercicio nº 20.-

Estudia la compatibilidad de este sistema y resuélvelo si tiene solución:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+z-t=-2 \\ 2x+y-2z+2t=3 \\ -x-y+z+t=5 \end{array}\right\}$$

Ejercicio nº 21.-

Discute el siguiente sistema, y resuélvelo cuando sea posible, en función del parámetro *a:*

$$\left.\begin{array}{r} y+az=1 \\ x+a^2z=2a+1 \\ x-y+a(a-1)z=2a \end{array}\right\}$$

Ejercicio nº 22.-

Discute y resuelve el siguiente sistema, según los valores del parámetro *m*:

$$\left.\begin{array}{r} mx+y+z=2 \\ x+my=1 \\ x+my+mz=1 \end{array}\right\}$$

Ejercicio nº 23.-

Discute el siguiente sistema homogéneo según los diferentes valores del parámetro λ. Resuélvelo en los casos en los que resulte ser compatible indeterminado:

$$\left.\begin{array}{r} \lambda x+2z=0 \\ (\lambda-2)y+z=0 \\ (\lambda-1)x+y-z=0 \end{array}\right\}$$

Ejercicio nº 24.-

Estudia el siguiente sistema homogéneo según los valores de λ y resuélvelo en los casos en los que resulte ser compatible indeterminado:

$$\left.\begin{array}{r} \lambda x-y+2z=0 \\ -x+\lambda y+2z=0 \\ 2x+\lambda y-z=0 \end{array}\right\}$$

Ejercicio nº 25.-

Discute, y resuelve cuando sea posible, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} ax+y=a \\ (a+1)x+2y+z=a+3 \\ 2y+z=2 \end{array}\right\}$$

Soluciones sistemas por el Método de Matriz Inversa

Ejercicio nº 1.-

Expresa y resuelve el siguiente sistema en forma matricial:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{4x+2y-z=6} \\ \mathbf{x \qquad +z=1} \\ \mathbf{2x+y+z=3} \end{array}\right\}$$

Solución:

Expresamos el sistema en forma matricial:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix};\quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \to \quad AX=C$$

Calculamos $|A|$ para ver si existe A^{-1}:

$$|A|=\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-3\neq 0 \quad \to \quad \text{Existe } A^{-1}$$

Calculamos la inversa de A:

$$Adj(A)=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 6 & 0 \\ 2 & -5 & -2 \end{pmatrix} \quad \to \quad (Adj(A))^t=\begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 1 & 6 & -5 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \to$$

$$\to \quad A^{-1}=\frac{1}{|A|}(Adj(A))^t=\frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 1 & 6 & -5 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Despejamos X:

$$AX=C \quad \to \quad A^{-1}AX=A^{-1}C \quad \to \quad X=A^{-1}C$$

$$X=\frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 1 & 6 & -5 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}=\frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la solución del sistema es:

$x=1,\ \ y=1,\ \ x=0$

Ejercicio nº 2.-

Expresa en forma matricial y resuelve utilizando la matriz inversa:

$$\left.\begin{array}{r} -x+2y-z=1 \\ 3x-y+2z=-4 \\ x-y+z=-1 \end{array}\right\}$$

Solución:

Expresamos el sistema en forma matricial:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix};\quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}\quad\rightarrow\quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}\quad\rightarrow\quad AX=C$$

Calculamos $|A|$, para ver si existe A^{-1}:

$$|A|=\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-1\neq 0\quad\rightarrow\quad \text{Existe } A^{-1}$$

Calculamos la inversa de A:

$$Adj(A)=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -5 \end{pmatrix}\quad\rightarrow\quad (Adj(A))^t=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -5 \end{pmatrix}\quad\rightarrow$$

$$\rightarrow\quad A^{-1}=\frac{1}{|A|}(Adj(A))^t=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Despejamos X:

$$AX=C\quad\rightarrow\quad A^{-1}AX=A^{-1}C\qquad X=A^{-1}C$$

$$X=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la solución del sistema es:

$$x=-2,\ \ y=0,\ \ z=1$$

Ejercicio nº 3.-

Expresa el siguiente sistema en forma matricial y resuélvelo utilizando la matriz inversa:

$$\left.\begin{array}{r} -3x+y-z=-5 \\ x+2y+z=0 \\ 2x\qquad +z=3 \end{array}\right\}$$

Solución:

Expresamos el sistema en forma matricial:

$$A=\begin{pmatrix}-3 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix};\quad X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}-5\\ 0\\ 3\end{pmatrix}\quad\rightarrow\quad\begin{pmatrix}-3 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\ 0\\ 3\end{pmatrix}\quad\rightarrow\quad AX=C$$

Calculamos $|A|$ para ver si existe A^{-1}:

$$|A|=\begin{pmatrix}-3 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}=-1\neq 0\quad\rightarrow\quad \text{Existe } A^{-1}$$

Calcula la inversa de A:

$$Adj\,(A)=\begin{pmatrix}2 & 1 & -4\\ -1 & -1 & 2\\ 3 & 2 & -7\end{pmatrix}\quad\rightarrow\quad (Adj\,(A))^t=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & -1 & 2\\ -4 & 2 & -7\end{pmatrix}\quad\rightarrow$$

$$\rightarrow\quad A^{-1}=\frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -3\\ -1 & 1 & -2\\ 4 & -2 & 7\end{pmatrix}$$

Despejamos X:

$$AX=C\quad\rightarrow\quad A^{-1}AX=A^{-1}C\quad\rightarrow\quad X=A^{-1}C$$

$$X=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -3\\ -1 & 1 & -2\\ 4 & -2 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5\\ 0\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$$

Por tanto, la solución del sistema es:

$x=1,\ y=-1,\ z=1$

<u>Ejercicio nº 4.-</u>

Expresa y resuelve en forma matricial el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x-y+z=6}\\ \boldsymbol{2x-y+z=8}\\ \boldsymbol{x-2y+z=7}\end{aligned}\right\}$$

Solución:

Expresamos el sistema en forma matricial:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix};\quad X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}6\\ 8\\ 7\end{pmatrix}\quad\rightarrow\quad\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\ 8\\ 7\end{pmatrix}\quad\rightarrow\quad AX=C$$

Calculamos $|A|$, para ver si existe A^{-1}:

$$|A| = \left|\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\right| = -1 \neq 0 \ \rightarrow \ \text{Existe } A^{-1}$$

Calculamos la inversa de A:

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \ \rightarrow \ (Adj(A))^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \ A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Despejamos X:

$$AX = C \ \rightarrow \ A^{-1}AX = A^{-1}C \ \rightarrow \ X = A^{-1}C$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la solución del sistema es:

$x = 2, \ y = -1, \ z = 3$

Ejercicio nº 5.-

Expresa en forma matricial y resuelve, utilizando la matriz inversa:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{2x + 3y + z} &= \mathbf{7} \\ \mathbf{x + y - 2z} &= \mathbf{5} \\ \mathbf{y + 2z} &= \mathbf{0} \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Expresamos el sistema en forma matricial:

Si llamamos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \ C = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \ \rightarrow \ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \ \rightarrow \ AX = C$$

Para resolverlo, despejamos X multiplicando por la izquierda por A^{-1}:

$$AX = C \ \rightarrow \ A^{-1}AX = A^{-1}C \ \rightarrow \ X = A^{-1}C$$

Comprobamos que $|A| = 3 \neq 0$ y hallamos A^{-1}:

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -5 & 4 & -2 \\ -7 & 5 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow (Adj(A))^t = \begin{pmatrix} 4 & -5 & -7 \\ -2 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -5 & -7 \\ -2 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Obtenemos X:

$$X = A^{-1}C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -5 & -7 \\ -2 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto la solución del sistema es:

$x = 1;\ \ y = 2;\ \ z = -1$

Soluciones Teorema de Rouché y Regla de Cramer

Ejercicio nº 6.-

Estudia la compatibilidad del siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x - y + 2z - t &= 3 \\ 2x + y - z + t &= 2 \\ -x + y + z - t &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$

Luego, $ran(A) \geq 2$.

Además:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$$

Por tanto, $ran\ (A) = 3$.

Con esto, también deducimos que $ran\ (A') = 3$, siendo A' la matriz ampliada.

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Así, como $ran\ (A) = ran\ (A') <$ *nº incógnitas,* el sistema es compatible indeterminado.

<u>Ejercicio nº 7.-</u>

Estudia la compatibilidad de este sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x - 2y} &= \mathbf{3} \\ \boldsymbol{-x + 3y} &= \mathbf{-1} \\ \boldsymbol{-x + 6y} &= \mathbf{2} \\ \boldsymbol{x - y} &= \mathbf{5} \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \\ -1 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow ran\left(A\right) = 2.$$

Hallamos el rango de la matriz ampliada:

$$A' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ \hline -1 & 6 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 6 & 2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow ran\left(A'\right) = 3$$

Como $ran\ (A) \neq ran\ (A')$, el sistema es incompatible.

<u>Ejercicio nº 8.-</u>

Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{2}\boldsymbol{x - y + 3z} &= \mathbf{1} \\ \boldsymbol{-x + y - z} &= \mathbf{2} \\ \boldsymbol{x + y + 3z} &= \mathbf{3} \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \rightarrow |A| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow ran\left(A\right) = 2$$

Hallamos el rango de la matriz ampliada:

$$A' = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \rightarrow ran\left(A'\right) = 3$$

Como $ran\ (A) \neq ran\ (A')$, el sistema es incompatible.

Ejercicio nº 9.-

Estudia la compatibilidad del sistema:

$$\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{x + y - z = 3} \\ \boldsymbol{-x + 2y - z = 1} \\ \boldsymbol{2x - y + z = 2} \end{array}\right\}$$

Solución:

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow ran\left(A\right) = 3$$

El rango de la matriz ampliada, A', será también 3.

Por tanto, como $ran\ (A) = ran\ (A') = n^{\underline{o}}\ incógnitas$, el sistema es compatible determinado.

Ejercicio nº 10.-

Utiliza el teorema de Rouché para estudiar la compatibilidad del siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{3x - 4y + z = 1} \\ \boldsymbol{-x + 2y - z = 3} \\ \boldsymbol{x \quad\quad - z = 7} \end{array}\right\}$$

Solución:

- Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0. \text{ Luego, } ran\ (A) \geq 2.$$

Además, $|A| = 0.$ Por tanto, $ran\ (A) = 2.$

- Hallamos el rango de la matriz ampliada:

$$A' = \left(\begin{array}{cc:c|c} 3 & -4 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ \hdashline 1 & 0 & -1 & 7 \end{array}\right) \rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 0. \text{ Luego, } ran\,(A') = 2.$$

- Así, como $ran\ (A) = ran\ (A') <$ *nº incógnitas*, el sistema es compatible indeterminado.

<u>Ejercicio nº 11.-</u>

Resuelve estos sistemas, aplicando la regla de Cramer:

a) $\left.\begin{array}{l} -x + 4y = -6 \\ 2x - 3y = 7 \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r} x - 2y + z = -3 \\ 2x + 3y - z = 3 \\ x - y + 3z = 6 \end{array}\right\}$

Solución:

a) $\left.\begin{array}{l} -x + 4y = -6 \\ 2x - 3y = 7 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cc:c} -1 & 4 & -6 \\ 2 & -3 & 7 \end{array}\right); \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}; \quad |A| = -5$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -6 & 4 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{-10}{-5} = 2; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{5}{-5} = -1$$

La solución del sistema es: $x = 2$, $y = -1$

b) $\left.\begin{array}{r} x - 2y + z = -3 \\ 2x + 3y - z = 3 \\ x - y + 3z = 6 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 6 \end{array}\right); \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 17$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \\ 6 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{17} = \frac{-15}{17}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}}{17} = \frac{45}{17};$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 6 \end{vmatrix}}{17} = \frac{54}{17}$$

La solución del sistema es: $x = \frac{-15}{17}, \quad y = \frac{45}{17}, \quad z = \frac{54}{17}$

<u>Ejercicio nº 12.-</u>

Resuelve los siguientes sistemas, aplicando la regla de Cramer:

a) $\left.\begin{array}{l} 2x - y = 0 \\ 3x + y = 5 \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r} x + y - z = 2 \\ -x + 2y + z = 4 \\ 3x + y + z = 6 \end{array}\right\}$

Solución:

a) $\left.\begin{array}{r} 2x-y=0 \\ 3x+y=5 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{array}\right); \quad A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad |A|=5$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}}{5}=\frac{5}{5}=1; \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}}{5}=\frac{10}{5}=2$$

La solución del sistema es: $x=1, \; y=2$

b) $\left.\begin{array}{r} x+y-z=2 \\ -x+2y+z=4 \\ 3x+y+z=6 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right); \quad |A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}=12$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{12}=\frac{12}{12}=1; \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix}}{12}=\frac{24}{12}=2;$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}}{12}=\frac{12}{12}=1$$

La solución del sistema es: $x=1, \; y=2, \; z=1$

Ejercicio nº 13.-

Resuelve, aplicando la regla de Cramer, los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{-x+3y=-5} \\ \boldsymbol{x+y=1} \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{-x+2y-z=0} \\ \boldsymbol{x-3y+z=-3} \\ \boldsymbol{2x+y-z=1} \end{array}\right\}$

Solución:

a) $\left.\begin{array}{r} -x+3y=-5 \\ x+y=1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right); \quad A=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad |A|=-4$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4}=\frac{-8}{-4}=2; \quad y=\frac{\begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4}=\frac{4}{-4}=-1$$

La solución del sistema es: $x=2, \; y=-1$

b) $\left.\begin{array}{r} -x+2y-z=0 \\ x-3y+z=-3 \\ 2x+y-z=1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right); \quad |A|=\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-3$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-9}{-3} = 3;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-14}{-3} = \frac{14}{3}$$

La solución del sistema es: $x = \frac{4}{3}; \quad y = 3; \quad x = \frac{14}{3}$

<u>Ejercicio nº 14.-</u>

Resuelve, aplicando la regla de Cramer:

a) $\left.\begin{aligned} -3x + 2y &= 3 \\ 2x - y &= -1 \end{aligned}\right\}$ **b)** $\left.\begin{aligned} 2x - y - z &= 0 \\ -x + 2y + z &= 1 \\ x - 3y - 2z &= -3 \end{aligned}\right\}$

Solución:

a) $\left.\begin{aligned} -3x + 2y &= 3 \\ 2x - y &= -1 \end{aligned}\right\} \left(\begin{array}{cc:c} -3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{array}\right); \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}; \quad |A| = -1$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-1}{-1} = 1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-3}{-1} = 3$$

La solución del sistema es: $x = 1, \; y = 3$

b) $\left.\begin{aligned} 2x - y - z &= 0 \\ -x + 2y + z &= 1 \\ x - 3y - 2z &= -3 \end{aligned}\right\} \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 & -3 \end{array}\right); \quad |A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -2$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & -2 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{0}{-2} = 0;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -3 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

La solución del sistema es: $x = 1, \; y = 0, \; z = 2$

Ejercicio nº 15.-

Aplica la regla de Cramer para resolver estos sistemas:

a) $\left.\begin{array}{r} \mathbf{3x+2y=-5} \\ \mathbf{5x+y=1} \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r} \mathbf{x+2y-z=1} \\ \mathbf{-3x+y+z=-5} \\ \mathbf{x-y+3z=5} \end{array}\right\}$

Solución:

a) $\left.\begin{array}{r} 3x+2y=-5 \\ 5x+y=1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & -5 \\ 5 & 1 & 1 \end{array}\right); \quad |A| = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}; \quad |A| = -7$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{-7}{-7} = 1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{28}{-7} = -4$$

La solución del sistema es: $x = 1$, $y = -4$

b) $\left.\begin{array}{r} x+2y-z=1 \\ -3x+y+z=-5 \\ x-y+3z=5 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 3 & 5 \end{array}\right); \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 22$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -5 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{22} = \frac{44}{22} = 2; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}}{22} = \frac{0}{22} = 0$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}}{22} = \frac{22}{22} = 1$$

La solución del sistema es: $x = 2$, $y = 0$, $z = 1$

Ejercicio nº 16.-

Estudia, y resuelve si es posible, el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{2x+2y+z-t=8} \\ \mathbf{x+y-z+t=1} \\ \mathbf{-x+2y+z+2t=2} \end{array}\right\}$$

Solución:

En primer lugar, estudiamos la compatibilidad del sistema. Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Tomamosunmenordeorden2 distintodecero: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$

Luego, $ran\ (A) \geq 2$.

Además:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$$

Por tanto, $ran\ (A) = 3$.

Con esto, también deducimos que $ran\ (A) = 3$, siendo A' la matriz ampliada:

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Así, como $ran\ (A) = ran\ (A') <$ *nº incógnitas,* el sistema es compatible indeterminado.

Para resolverlo, pasamos la t al 2º miembro y aplicamos la regla de Cramer:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 2y + z = 8 + t \\ x + y - z = 1 - t \\ -x + 2y + z = 2 - 2t \end{array}\right\}$$

Hacemos $t = \lambda$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 8+\lambda \\ 1 & 1 & -1 & 1-\lambda \\ -1 & 2 & 1 & 2-2\lambda \end{array}\right)$

Sabemosque $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 9.$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8+\lambda & 2 & 1 \\ 1-\lambda & 1 & -1 \\ 2-2\lambda & 2 & 1 \end{vmatrix}}{9} = \frac{18+9\lambda}{9} = 2 + \lambda$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 8+\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & 2-2\lambda & 1 \end{vmatrix}}{9} = \frac{9-9\lambda}{9} = 1 - \lambda$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 8+\lambda \\ 1 & 1 & 1-\lambda \\ -1 & 2 & 2-2\lambda \end{vmatrix}}{9} = \frac{18+9\lambda}{9} = 2 + \lambda$$

Las soluciones del sistema son:

$x = 2+\lambda$, $y = 1-\lambda$, $z = 2+\lambda$, $t = \lambda$, con $\lambda \in \mathbf{P}$.

Ejercicio nº 17.-

Estudia la compatibilidad del siguiente sistema, y resuélvelo si es posible:

$$\left.\begin{aligned} -x+y-2z&=-5\\ x+3y+z&=-4\\ 7x+5y+11z&=8 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

En primer lugar, estudiamos la compatibilidad del sistema. Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2\\ 1 & 3 & 1\\ 7 & 5 & 11 \end{pmatrix}$$

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} -1 & 1\\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-4\neq 0$

Luego, $ran\ (A)\geq 2$.

Además, $|A|=0$. Por tanto, $\text{ran}(A)=2$.

Hallamos el rango de la matriz ampliada:

$$A'=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & -5\\ 1 & 3 & 1 & -4\\ 7 & 5 & 11 & 8 \end{pmatrix}$$

Sabemos que la 3ª columna depende linealmante de las otras dos primeras. Veamos qué ocurre con la 4ª columna:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -5\\ 1 & 3 & -4\\ 7 & 5 & 8 \end{vmatrix}=0$$

Por tanto, $ran\ (A')=2$.

Como $ran\ (A)=ran\ (A')<$ *nº incógnitas,* el sistema es compatible indeterminado.

Para resolverlo, podemos prescindir de la 3ª ecuación pues es combinación lineal de las dos primeras. Pasamos la *z* al 2º miembro y aplicamos la regla de Cramer:

$$\left.\begin{aligned} -x+y&=-5+2z\\ x+3y&=-4-z \end{aligned}\right\}$$

Hacemos $z=\lambda$: $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & -5+2\lambda\\ 1 & 3 & -4-\lambda \end{array}\right)$

Sabemos que $\begin{vmatrix} -1 & 1\\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-4.$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -5+2\lambda & 1\\ -4-\lambda & 3 \end{vmatrix}}{-4}=\frac{-11+7\lambda}{-4}=\frac{11}{4}-\frac{7}{4}\lambda$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}-1 & -5+2\lambda\\ 1 & -4-\lambda\end{vmatrix}}{-4}=\frac{9-\lambda}{-4}=\frac{-9}{4}+\frac{1}{4}\lambda$$

Las soluciones del sistema son:

$$x=\frac{11}{4}-\frac{7}{4}\lambda;\ \ y=\frac{-9}{4}+\frac{1}{4}\lambda;\ \ z=\lambda,\ \text{ con }\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

Ejercicio nº 18.-

Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones y resuélvelo si es posible:

$$\left.\begin{aligned}x+y+2z&=6\\ 3x-y+z&=5\\ -x+2y-z&=1\end{aligned}\right\}$$

Solución:

Empezamos estudiando la compatibilidad del sistema. Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 3 & -1 & 1\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}\ \rightarrow\ |A|=11\neq 0.\ \text{Por tanto, } ran(A)=3.$$

También el rango de la matriz ampliada, A', será 3.

Así, como $ran\ (A)=ran\ (A')=n^{o}$ *incógnitas*, el sistema es compatible determinado.

Lo resolveremos aplicando la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}6 & 1 & 2\\ 5 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}}{11}=\frac{22}{11}=2;\ \ y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 6 & 2\\ 3 & 5 & 1\\ -1 & 1 & -1\end{vmatrix}}{11}=\frac{22}{11}=2;\ \ z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 6\\ 3 & -1 & 5\\ -1 & 2 & 1\end{vmatrix}}{11}=\frac{11}{11}=1$$

La solución del sistema es: $x=2,\ y=2,\ z=1$

Ejercicio nº 19.-

Estudia, y resuelve si es posible, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned}-3x+4y-z&=-3\\ x+2y+z&=5\\ x+y+3z&=6\end{aligned}\right\}$$

Solución:

En primer lugar, estudiamos la compatibilidad del sistema. Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A=\begin{pmatrix}-3 & 4 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}\ \rightarrow\ |A|=-22\neq 0\ \rightarrow\ ran\,(A)=3$$

El rango de la matriz ampliada será también 3.

Por tanto, como $ran\ (A) = ran\ (A') = n^{\underline{o}}\ incógnitas$, el sistema es compatible determinado.

Lo resolveremos aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-22} = \frac{-44}{-22} = 2; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} -3 & -3 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}}{-22} = \frac{-22}{-22} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}}{-22} = \frac{-22}{-22} = 1$$

La solución al sistema es: $x = 2$, $y = 1$, $z = 1$

<u>Ejercicio nº 20.-</u>

Estudia la compatibilidad de este sistema y resuélvelo si tiene solución:

$$\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{x + 2y + z - t = -2} \\ \boldsymbol{2x + y - 2z + 2t = 3} \\ \boldsymbol{-x - y + z + t = 5} \end{array}\right\}$$

Solución:

En primer lugar, estudiamos la compatibilidad del sistema. Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$

Luego, $ran\ (A) \geq 2$.

Además:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Por tanto, $ran\ (A) = 3$.

Con esto, también deducimos que $ran\ (A') = 3$, siendo A' la matriz ampliada:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Así, como $ran\ (A) = ran\ (A') < n^{\underline{o}}\ incógnitas$, el sistema es compatible indeterminado.

Para resolverlo, pasamos la t al 2º miembro y aplicamos la regla de Cramer.

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+z=-2+t \\ 2x+y-2z=3-2t \\ -x-y+z=5-t \end{array}\right\}$$

Hacemos $t=\lambda$. Entonces:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -2+\lambda \\ 2 & 1 & -2 & 3-2\lambda \\ -1 & -1 & 1 & 5-\lambda \end{array}\right)$$

Sabemos que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-2.$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -2+\lambda & 2 & 1 \\ 3-2\lambda & 1 & -2 \\ 5-\lambda & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-2}=\frac{-32+10\lambda}{-2}=16-5\lambda$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -2+\lambda & 1 \\ 2 & 3-2\lambda & -2 \\ -1 & 5-\lambda & 1 \end{vmatrix}}{-2}=\frac{26-8\lambda}{-2}=-13+4\lambda$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2+\lambda \\ 2 & 1 & 3-2\lambda \\ -1 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix}}{-2}=\frac{-16+4\lambda}{-2}=8-2\lambda$$

Las soluciones del sistema son:

$x=16-5\lambda$, $y=-13+4\lambda$, $z=8-2\lambda$, $t=\lambda$, con $\lambda \in \boldsymbol{R}$

Ejercicio nº 21.-

Discute el siguiente sistema, y resuélvelo cuando sea posible, en función del parámetro *a*:

$$\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{y+az=1} \\ \boldsymbol{x+a^2z=2a+1} \\ \boldsymbol{x-y+a(a-1)z=2a} \end{array}\right\}$$

Solución:

Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A=\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a^2 \\ \hline 1 & -1 & a(a-1) \end{array}\right) \quad \rightarrow \quad |A|=0 \text{ para cualquier valor de } a.$$

Como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, entonces $ran\,(A) = 2$ para cualquier valor de a.

Estudiamos el rango de la matriz ampliada:

$$A' = \left(\begin{array}{cc:cc} 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & 2a+1 \\ \hdashline 1 & -1 & a(a-1) & 2a \end{array}\right) \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 2a \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, $ran\,(A') = 2$.

Como $ran\,(A) = ran\,(A')$ < *nº incógnitas,* el sistema es compatible indeterminado para cualquier valor de a.

Podemos prescindir de la 3ª ecuación, pues es combinación lineal de las dos primeras.

Lo resolveremos pasando la z al 2º miembro:

$$\left.\begin{array}{r} y + az = 1 \\ x + a^2 z = 2a + 1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y = 1 - az \\ x = 2a + 1 - a^2 z \end{array}\right\} \text{ Hacemos } z = \lambda$$

Las soluciones del sistema serían:

$$x = 2a + 1 - a^2\lambda; \quad y = 1 - a\lambda; \quad z = \lambda, \quad \text{con } \lambda \in \mathbf{R}.$$

Ejercicio nº 22.-

Discute y resuelve el siguiente sistema, según los valores del parámetro m:

$$\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{mx + y + z = 2} \\ \boldsymbol{x + my = 1} \\ \boldsymbol{x + my + mz = 1} \end{array}\right\}$$

Solución:

Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 0 \\ 1 & m & m \end{pmatrix} \rightarrow |A| = m^3 - m = m(m^2 - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$$

- Si $m \neq 0$, $m \neq 1$ y $m \neq -1$ $\rightarrow$ El sistema es compatible determinado.

  Para cada valor de m, distinto de 0, 1 y –1, tenemos un sistema diferente, todos ellos con solución única:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & m & 0 \\ 1 & m & m \end{vmatrix}}{m(m^2-1)} = \frac{m(2m-1)}{m(m^2-1)} = \frac{2m-1}{m^2-1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} m & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}}{m(m^2-1)} = \frac{m(m-2)}{m(m^2-1)} = \frac{m-2}{m^2-1}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} m & 1 & 2\\ 1 & m & 1\\ 1 & m & 1\end{vmatrix}}{m\left(m^2-1\right)}=0$$

$$Solución\left(\frac{2m-1}{m^2-1},\ \frac{m-2}{m^2-1},\ 0\right)$$

- Si $m=0$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

Las dos últimas filas son iguales y $\begin{vmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1\neq 0.$

Luego, el sistema es compatible indeterminado.

Las soluciones serían:

$$\left.\begin{array}{l} y=2-z\\ x=1\\ z=\lambda\end{array}\right\}\quad \text{Es decir: } x=1,\ y=2-\lambda,\ z=\lambda,\ \text{con } \lambda\in\mathbf{R}$$

- Si $m=1$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{array}\right)$$ Las ecuaciones $1^{\underline{a}}$ y $3^{\underline{a}}$ son contradictorias. El sistema sería incompatible.

- Si $m=-1$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} \text{FILAS}\\ 1^{\underline{a}}\cdot(-1)\\ 2^{\underline{a}}\\ 3^{\underline{a}}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -2\\ 1 & -1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{array}\right)$$

Las ecuaciones 1ª y 3ª son contradictorias. El sistema sería incompatible.

Ejercicio nº 23.-

Discute el siguiente sistema homogéneo según los diferentes valores del parámetro λ.
Resuélvelo en los casos en los que resulte ser compatible indeterminado:

$$\left.\begin{array}{r} \lambda x \qquad + 2z = 0\\ (\lambda-2)y + z = 0\\ (\lambda-1)x + y - z = 0\end{array}\right\}$$

Solución:

Por tratarse de un sistema homogéneo, siempre tiene la solución trivial (0, 0, 0). Veamos si tiene, en algún caso, más soluciones.

Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 2\\ 0 & \lambda-2 & 1\\ \lambda-1 & 1 & -1\end{pmatrix} \rightarrow \ |A|=-3\lambda^2+7\lambda-4=0\ \begin{cases}\lambda=1\\ \lambda=\dfrac{4}{3}\end{cases}$$

- Para $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq \dfrac{4}{3}$ $\rightarrow$ El sistema solo tiene la solución trivial $(0,\ 0,\ 0)$.

- Para $\lambda = 1$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\end{array}\right)$$

Como $\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}=-1\neq 0$, $ran\,(A)=ran\,(A')=2.$

El sistema sería compatible indeterminado.

Para resolverlo, pasamos z al 2º miembro:

$$\left.\begin{array}{r}x+2z=0\\ -y+z=0\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l}x=-2z\\ y=z\end{array}\right\}\ \text{Hacemos } z=\mu$$

Las soluciones serían: $x=-2\mu;\ y=\mu;\ z=\mu$, con $\mu\in \boldsymbol{R}$

- Para $\lambda=\dfrac{4}{3}$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}4/3 & 0 & 2 & 0\\ 0 & -2/3 & 1 & 0\\ 1/3 & 1 & -1 & 0\end{array}\right)$$

Como $\begin{vmatrix}\frac{4}{3} & 0\\ 0 & \frac{-2}{3}\end{vmatrix}=\dfrac{-8}{9}\neq 0$, $ran\,(A)=ran\,(A')=2.$

El sistema sería compatible indeterminado.
Para resolverlo, pasamos z al 2º miembro:

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{4}{3}x+2z=0\\ \dfrac{-2}{3}y+z=0\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r}4x+6z=0\\ -2y+3z=0\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r}4x=-6z\\ -2y=-3z\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}x=\dfrac{-6}{4}z=\dfrac{-3}{2}z\\ y=\dfrac{-3}{-2}z=\dfrac{3}{2}z\end{array}$$

Las soluciones serían: $x=\dfrac{-3}{2}\mu;\ y=\dfrac{3}{2}\mu;\ z=\mu$, con $\mu\in \mathrm{R}$

Ejercicio nº 24.-

Estudia el siguiente sistema homogéneo según los valores de λ y resuélvelo en los casos en los que resulte ser compatible indeterminado:

$$\left.\begin{aligned} \lambda x - y + 2z &= 0 \\ -x + \lambda y + 2z &= 0 \\ 2x + \lambda y - z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Por tratarse de un sistema homogéneo, siempre tiene la solución trivial (0, 0, 0).Veamos si tiene, en algún caso, más soluciones:

Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 2 \\ -1 & \lambda & 2 \\ 2 & \lambda & -1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad |A| = -3\lambda^2 - 6\lambda - 3 = -3(\lambda + 1)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = -1$$

- Si $\lambda \neq -1 \rightarrow$ el sistema solo tiene la solución trivial (0, 0, 0).
- Si $\lambda = -1$, quedaría:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Las dos primeras filas son iguales y, además, $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$

Luego, *ran* $(A) =$ *ran* $(A') = 2 <$ *nº incógnitas.*

El sistema sería compatible indeterminado. Para resolverlo, pasamos z al 2º miembro y aplicamos la regla de Cramer:

$$\left.\begin{aligned} -x - y + 2z &= 0 \\ 2x - y - z &= 0 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} -x - y &= -2z \\ 2x - y &= z \end{aligned}\right\} \quad \text{Hacemos } z = \mu$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & -2\mu \\ 2 & -1 & \mu \end{array}\right)$$

Sabemos que $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3.$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2\mu & -1 \\ \mu & -1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{3\mu}{3} = \mu; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -2\mu \\ 2 & \mu \end{vmatrix}}{3} = \frac{3\mu}{3} = \mu$$

Las soluciones del sistema son:

$x = \mu;\ y = \mu;\ z = \mu,$ con $\mu \in \boldsymbol{R}$

Ejercicio nº 25.-

Discute, y resuelve cuando sea posible, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{ax + y = a} \\ \boldsymbol{(a+1)x + 2y + z = a + 3} \\ \boldsymbol{2y + z = 2} \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Estudiando el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ a+1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \quad |A| = 2a - 2a - (a+1) = -(a+1) = 0 \quad \rightarrow \quad a = -1$$

- Si $a \neq -1 \;\; \rightarrow \;\; ran\ (A) = ran\ (A') = 3$. El sistema es compatible determinado. Para cada valor de $a \neq -1$, tenemos un sistema con solución única:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ a+3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-(a+1)} = \frac{-a-1}{-a-1} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & a & 0 \\ a+1 & a+3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-(a+1)} = 0$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ a+1 & 2 & a+3 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{-(a+1)} = \frac{-2(a+1)}{-(a+1)} = 2$$

Para cada valor de $a \neq 1$, tenemos un sistema diferente.
Cada uno de los sistemas tiene solución única:

$x = 1,\ \ y = 0,\ \ z = 2$

- Si $a = -1$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, entonces $ran\,(A) = 2$.

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Las dos últimas filas son iguales, luego $ran\ (A') = 2$.
Como $ran\ (A) = ran\ (A')$ < *nº incógnitas*, en este caso el sistema sería compatible indeterminado. Prescindimos de la 3ª ecuación, pues es idéntica a la 2ª, pasamos *z* al 2º miembro y resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} -x+y=-1 \\ 2y=2-z \end{array}\right\}\ \text{Hacemos } z=\lambda \quad \rightarrow \quad y=\frac{2-\lambda}{2}=1-\frac{1}{2}\lambda$$

$$x=y+1=1-\frac{1}{2}\lambda+1=2-\frac{1}{2}\lambda$$

Las soluciones del sistema son:

$$x=2-\frac{1}{2}\lambda;\ y=1-\frac{1}{2}\lambda;\ z=\lambda\ ,\ \text{con }\ \lambda\in\mathbf{R}$$